

Exponentialfunktion

Freitag, 30. September 2022 16:19

allgemeine Form:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Wachstumsfaktor

"neue y-Achsenabschnitt"

andere allgemeine Formen:

Linear: $f(x) = a \cdot x^1 + b$

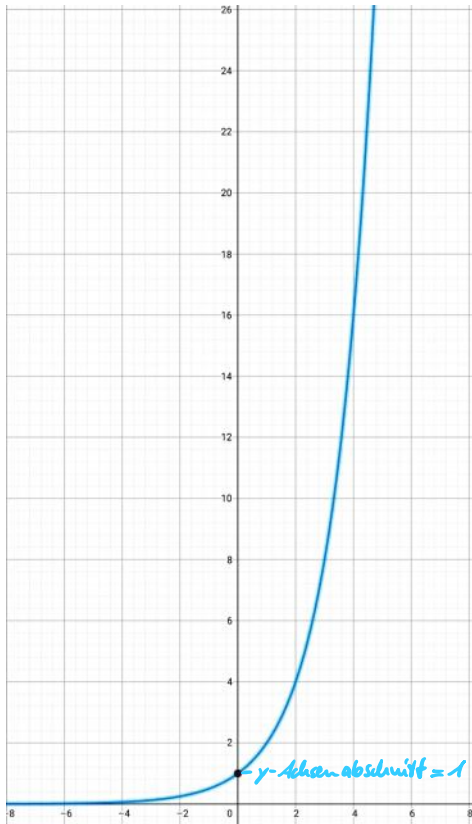
quadratisch: $f(x) = a \cdot x^2 + b$

Steigung

y-Achsenabschnitt

→ Exponentialfunktion, da das x im Exponenten steht!

Bsp.: Verdopplung:



$f(x) = 2^x = 1 \cdot 2^x$

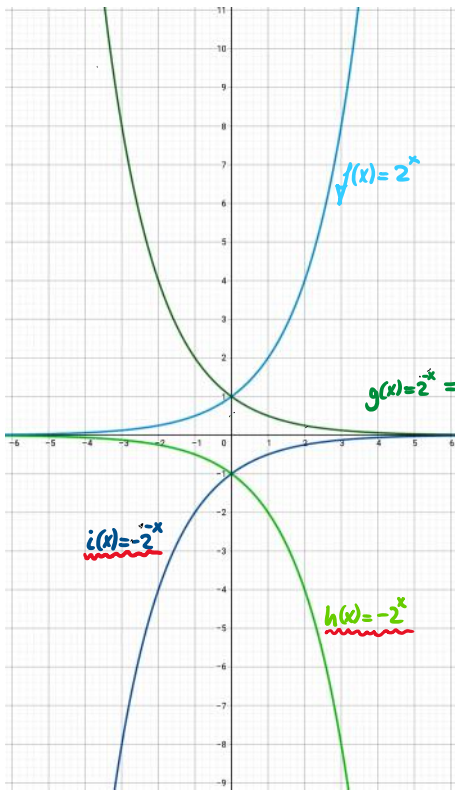
y-Achsenabschnitt

→ die Steigung verändert sich abhängig von x

→ die Steigung ist positiv, also:

Exponentielles Wachstum

verschiedene Vorzeichen:

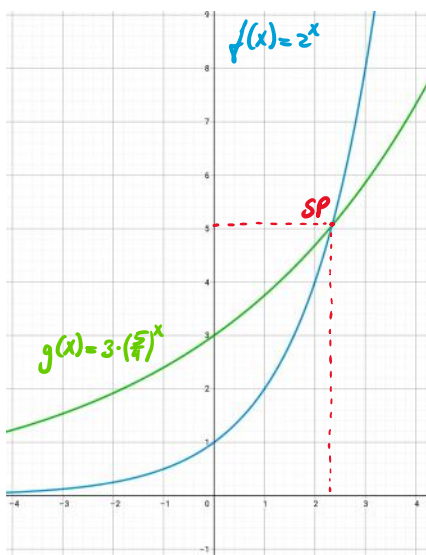


→ positive Steigung: exp. Wachstum

→ negative Steigung: exp. Zerfall

→ negativer Exponent: zeitliche Umkehrung

Schnittpunkt zweier Exponentialfunktionen:



1. Gleichsetzen & nach x auflösen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &\stackrel{!}{=} g(x) \\
 2^x &= 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x && | \rightarrow \text{Klammer auflösen...} \\
 2^x &= 3 \cdot \frac{5^x}{4^x} && | \cdot 4^x \\
 8^x &= 3 \cdot 5^x && | : 5^x \\
 \frac{8^x}{5^x} &= 3 \\
 \left(\frac{8}{5}\right)^x &= 3 && | \log(\dots) \\
 x \cdot \log\left(\frac{8}{5}\right) &= \log(3) && | : \log\left(\frac{8}{5}\right) \\
 x &= \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{8}{5}\right)} \approx 2,34
 \end{aligned}$$

2. in eine der Gleichungen einsetzen:

$$f(2,34) = 2^{2,34} \approx 5,06 \Rightarrow \underline{\underline{SP(2,34|5,06)}}$$

Exponentielle Abnahme:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

im Bereich $0 \dots 1$ z.B. $\frac{1}{3}$

Bsp: Alkoholabbau:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad | \quad b < 1 \quad a = 1,6$$

$x=1$ ← 1 Stunde: Abnahme von 0,2 Promille

$$f(1) = 1,6 \cdot b^1 = 1,4 \quad | : 1,6$$

z.B. Annahme:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad | \quad b < 1, a = 1,6$$

$$\Rightarrow f(1) = 1,6 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^1$$

$$\Rightarrow f(1) = 1,6 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^1 = 1,4$$

$$f(2) = 1,6 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1,225$$

$x=1 \leftarrow 1 \text{ Stunde: Abnahme von } 0,2 \text{ Promille}$

$$f(1) = 1,6 \cdot b^1 = 1,4 \quad | : 1,6$$

$$b = \frac{1,4}{1,6} = \frac{7}{8}$$

① Allgemeine Form aufschreiben:

$$f(x) = a \cdot b^x \quad | \quad b < 1, a = 1,6$$

Startwert: 1,6 Promille

② Beispiel fall überlegen, um b zu bestimmen (meistens $f(1)$):

$$f(1) = 1,6 \cdot b^1 = 1,6 - 0,2 = 1,4 \quad | : 1,6$$

$$b = \frac{1,4}{1,6} = \frac{7}{8}$$

③ Alle Variablen a, b in Ansatz einsetzen:

$$\Rightarrow f(x) = 1,6 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^x$$

aus Punkten die Gleichung aufstellen.

$$f(x) = y \rightarrow f(x) = a \cdot b^x, P(1|6), Q(2|18)$$

$$\begin{array}{l} \text{I } 6 = a \cdot b^1 \\ \text{II } 18 = a \cdot b^2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I } 6 = a \cdot b^1 \\ \text{II } 18 = a \cdot b^2 \end{array}} \right\} \text{lineares Gleichungssystem: LGS}$$

$\rightarrow$ Einsetzungsverfahren: nach a oder b auflösen:

$$6 = a \cdot b \quad | : b$$

$$\frac{6}{b} = a$$

$\rightarrow$ in die andere Gleichung einsetzen:

$$18 = a \cdot b^2 \quad | \quad a = \frac{6}{b}$$

$$\Rightarrow 18 = \frac{6}{b} \cdot b^2$$

$$\Leftrightarrow 18 = \frac{6 \cdot \cancel{b}^1 \cdot b^1}{\cancel{b}^1}$$

$$18 = \frac{6 \cdot b^1}{1}$$

$$18 = 6 \cdot b \quad | : 6$$

$$b = \frac{18}{6} = 3$$

Warum dürfen wir kürzen

$$\frac{b^2}{b^1} = \underbrace{b^2 : b^1}_{\text{Potenzgesetze...}} = b^{2-1} = b^1$$

Potenzgesetze...

$\rightarrow b$ wieder in eine Gleichung einsetzen.

$$\frac{6}{b} = a \quad | \quad b = 3$$

→ 6 wieder in eine Gleichung einsetzen:

$$\frac{6}{b} = a \quad | \quad b=3$$

$$a = \frac{6}{3} = 2$$

→ wir haben $a=2$ & $b=3$ bestimmt

→ nun in allgemeine Funktion einsetzen:

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot b^x \quad | \quad a=2, b=3$$

$$f(x) = 2 \cdot 3^x //$$