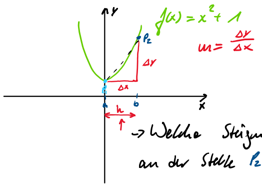
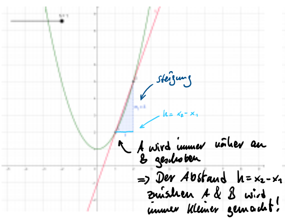
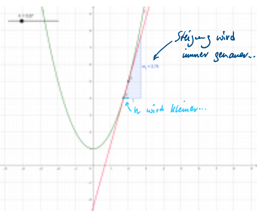
Herleitung lokale Änderungsrate

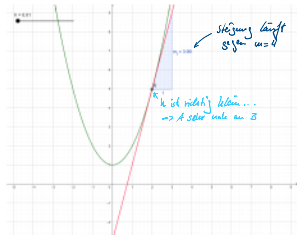
Montag, 22. September 2025 16:04



→ Welche Steigung haben wir an der Stelle P_2?







$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$h = b - a \quad | + a$

$b = h + a$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{h}$$

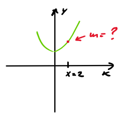
$$= \frac{f(h+a) - f(a)}{h}$$

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h+a) - f(a)}{h} \right)}$$

Der Limes macht h unendlich klein aber nicht Null!

Mit dieser Formel kann die lokale Steigung m an der Stelle a (in einem Punkt) ausgerechnet werden!

Bsp.: Wie ist die Steigung an der Stelle $x \overset{= a}{=} 2$ der Funktion $f(x) = x^2 + 1$?



$$m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h+a) - f(a)}{h} \right)$$

Variante 1:

$$m = \frac{f(h+a) - f(a)}{h} \qquad | \; a = x = 2$$

$$= \frac{f(h+2) - f(2)}{h} \qquad | \; h\text{: möglichst kleine Zahl z.B. } h = 0{,}00001$$

$$= \frac{f(0{,}00001 + 2) - f(2)}{0{,}00001}$$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$f(0{,}00001 + 2) = (0{,}00001 + 2)^2 + 1 = 4{,}00004 + 1 = 5{,}00004$

$$= \frac{5{,}00004 - 5}{0{,}00001}$$

$$\approx 4$$

Variante 2:

$$m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h+a) - f(a)}{h} \right) \qquad | \; a = x = 2$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h+2) - f(2)}{h} \right)$$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$f(h+2) = (h+2)^2 + 1 = h^2 + 4h + 4 + 1 = h^2 + 4h + 5$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{h^2 + 4h + \cancel{5} - \cancel{5}}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{h^2 + 4h}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 4)$$ ← stell dir vor h = 0...

$$= 4$$

=> Die Steigung an der Stelle $x = 2$ von der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ ist $m = 4$!